

設計變異模態應用於穩健最佳化設計

何文中 余志成

國立台灣科技大學 機械工程技術研究所

摘要

本文旨在研究設計參數之變異對輸出分佈與設計合理性 (Design Feasibility) 所產生的影響, 並對性能與合理性穩健化進行探討, 以建立限制條件穩健最佳化的搜尋法則。文中首先針對設計變異模態進行分析與原理推導, 並以二階段穩健最佳化的方式, 在求得公稱最佳設計後, 利用座標轉換的方式, 將設計變異模態標準化為設計變異超球體 (Design Variation Hyper-Sphere) 以簡化搜尋演算, 再結合序列近似法 (SLP 與 SQP) 修正限制條件, 確保合理性的穩健化。並修改目標函數為輸出分佈與公稱最佳值的變異平方和, 求取最佳性能的穩健化。最後根據所提出的設計法則, 撰寫交談視窗式的穩健最佳化軟體 (ROP)。

關鍵字：設計變異模態、變異球體、合理性穩健化、性能穩健化、序列近似法、田口方法

研究背景

傳統的設計過程, 往往忽略了設計與輸出性能不確定性的主動關聯性。造成產品性能輸出不穩定的潛在因子稱為設計變異 (Design Variation), 這些變異的產生可能來自製造公差與操作使用環境的不定性, 造成控制參數偏離原先設計值。傳統控制變異的方法是採用公差設計, 以緊縮製造公差來達成降低輸出誤差的目的, 然製造成本亦將隨之增加, 而不可控制因子 (Uncontrollable Factor) 的存在, 仍會造成輸出性能的不穩定性。由圖 1 可看出參數選擇對輸出誤差的影響性, 對於相同的參數分佈, 設計參數選定 x_2 時, 其輸出分佈範圍較設定於 x_1 的輸出分佈範圍小, 也就是說 x_2 的設計對於參數變異具有較小的敏感度, 亦即為較穩健的設計。穩健化設計乃運用參數設計, 降低輸出性能對參數變異的敏感度 (Sensitivity), 以不增加成本的方式提昇品質。

最佳化設計 (Optimization) 是一種常用的工程方法, 在滿足某些限制條件的設計空間中, 以數學方法搜尋目標函數極值時的設

計參數組合。然而參數常因製造與使用過程不可避免的誤差, 導致設計參數的偏移, 倘若設計之敏感度太大, 則其目標函數的最佳性與合理性便會受到影響。傳統最佳化的目標函數只單一描述設計的公稱輸出目標值, 當產品性能對於某些設計參數的變異非常敏感時, 產品性能輸出值的浮動將會相當大; 當一個產品性能輸出無法正確的掌握時, 其品質特性也將隨之大幅的降低。

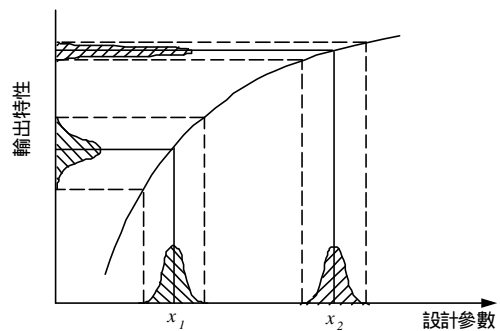


圖 1 參數選擇與輸出變異關係圖

穩健最佳化常以修改目標函數的定義, 利用多目標函數的概念, 同時對輸出的期望值與變異量進行最佳化。其中機率最佳化方法 (Probability optimization, Siddall, 1984) 即是以性能的期望值作為目標函數, 求取設計整體輸出的最佳化。但是性能期望值的計算需求知設計輸出的數學模式與參數機率函數, 其計算耗時且二者亦不易得知, 而且也忽略了輸出變異大小對品質的影響。田口玄一 (Taguchi & Wu, 1979) 乃提出利用實驗直交表與訊噪比進行參數設計, 從降低輸出對噪音因子的敏感度著手, 田口品質工程法具有相當的實用性, 尤其對於製造過程複雜或理論模組無法求得時, 田口方法可以較少實驗測試來估計設計的穩健性。d'Entremont 和 Ragsdell (1988) 與 Chang (1989) 應用田口方法的概念修改非線性搜尋中的目標函數, 將設計性能變異量加入目標函數的定義中, 使搜尋結果不僅達到性能的最佳化而且具有相當穩健性。Sundaresan 等 (1991) 提出敏感度指數 (SI), 來估計

設計對參數誤差的敏感度，並以公稱點輸出與 SI 的權重和作為目標函數。

$$\text{Minimize } Obj = g \cdot f_c + (1-g)SI \quad (1)$$

其中 g 為產品設計時對最佳化程度與穩健化程度比例指數， $g \in [0,1]$

f_c 為性能輸出的公稱值

$$SI = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (f_i - f_c)^2}{N}}$$

f_i 為各參數變異最差情況之第 i 種組合的性能數輸出

N 為設計參數最差情況組合的組數；即所採用直交表的實驗次數

在有限制條件的最佳化問題中，設計參數變異的傳遞，也會造成限制條件的不確定性。一般而言，其最佳解常落於部份有效限制條件上（Active Constraints），但是受參數變異的影響，限制條件也會呈現統計分佈，造成位於限制條件邊界上的公稱設計，可能在實際製造或使用時的誤差而落入不合理區。傳統的方式採用安全係數或應用最差狀況（Worst-Case），將設計往合理區域內部移動來修正設計，以避免違反限制條件，然而有可能因過於保守而失去設計最佳化的特性。因此為獲得最佳設計值，穩健化過程中必須考慮設計的分佈特性，適切地調整限制條件所形成的合理區域，使最佳化設計同時具有性能與合理性的穩健化。

目前研究合理性穩健化的方法多採二階段最佳化方式，在求得公稱最佳設計後，以一階泰勒展開式的方法估算參數變異對輸出與設計限制造成的偏差，調整有效限制條件來修正設計參數的合理區域（Parkinson等,1993），再進行穩健化設計的搜尋。

最差情況變異量：

$$g_i(x, b) + Db + Dg \leq 0, \quad D_g = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} D x_i \right| \quad (2)$$

統計變異量：

$$g_i(x, b) + b + k s_{g_i} \leq 0, \quad s_{g_i}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} s_{x_i} \right)^2 \quad (3)$$

或以 KKT 條件中的 Lagrange 乘數求出設計點因限制條件不確定性所需的修正量（Sundaresan,1993）。然而這些方法都是建立在設計參數彼此為獨立的假設下。當參數變異之間具有關聯性，或設計系統有強烈的非線性時，這些方法所得之結果便可能偏離實際的穩健最佳設計值。Yu 與 Ishii (1998) 運用迴歸分析中估計聯合信賴區間（Joint Confidence Region）的方法，提出以製造變

異模態配合輸出穩健性的估計與修正限制條件合理性的概念，取代泰勒展開式高階交互作用項計算的繁複。

張政雄與余志成（1997）假設穩健化後的設計點位於公稱最佳值的附近，在找出公稱最佳設計後將有效限制條件（Active Constraint）線性化，再依變異模態的形狀，將線性化限制條件內移以修正合理區，但如果在公稱最佳化值附近範圍的非線性強烈時，變異模態仍有可能會偏離合理區。序列近似法如 SLP 與 SQP 可逐漸趨近穩健最佳值，但一般參數變異模態呈橢圓體，在不同的設計點對限制條件的修正量不同，造成限制條件函數計算數目的大增。本文將結合性能與合理性穩健化的探討，首先利用座標轉換將變異模態轉換為變異球體，將設計之變異距離（Variation Distance），變為固定之變異半徑（Variation Radius），藉此簡化限制條件的檢定運算。本文也將應用變異球體於穩健化目標函數的估算上，建立限制條件穩健最佳化的搜尋法則，並根據所提出的法則，撰寫成視窗式的穩健最佳化應用程式。

穩健最佳化的概念

設計參數之間的變異存在著某些分佈特性，所構成的空間幾何分佈形狀稱為參數變異模態，參數變異模態會受到生命週期（Product Life-Cycle）中如製造與環境等因素影響其關聯性與分佈形狀，性能輸出為設計參數的函數，參數分佈特性也因此決定了輸出期望值與變異大小，這種關係直接影響了最佳化過程中目標函數的計算與限制條件的合理性的檢定，因此參數間的分佈特性為穩健最佳設計中一項重要的研究課題。

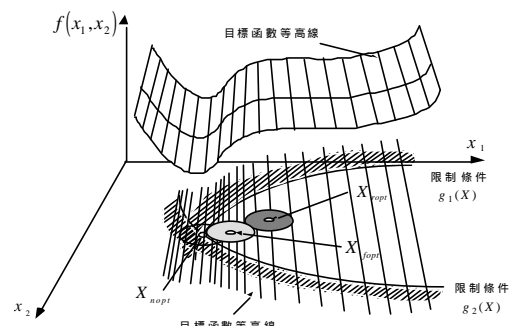


圖 2 性能穩健設計值

以圖 2 兩個參數的函數 $y = f(x_1, x_2)$ 為例，傳統最佳化搜尋可得 X_{opt} 點為最佳設計點，因其相對的公稱目標函數值為最小，然在實際應用中，參數 X 往往因生命週期的參數變異（Life-cycle parameter variations）呈統計分佈。我們以統計分佈的信賴區間橢圓體

來描述其分佈特性，並將之投影至目標函數與參數對應圖，由 X_{nop} 點因參數變異產生的分佈與限制條件，可明顯看出其參數分佈將會落入不合理區間。合理性的穩健化將設計點內移至如 X_{fopt} 。但除了滿足合理性的要求外，性能輸出的穩健化與最佳化也是原先的設計重點。因此在內部點找到一個期望目標函數與變異量都極小化的設計如 X_{ropt} ，即是穩健最佳化搜尋的目的。所以，穩健最佳化設計需同時考慮兩個層面：

- (1) 設計合理穩健化 (Feasibility Robustness)：在變異下需保證設計值仍在合理區。首先需找出參數的分佈形狀，再依其分佈模態適當的修正限制條件，縮小合理區 (圖 3)。

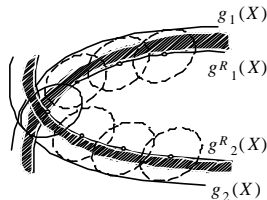


圖 3 變異模態修正限制條件

- (2) 設計性能穩健化 (Performance Robustness)：降低所得設計值對變異的敏感度。傳統最佳化問題中，隨著設計參數的變異分佈狀態，設計輸出也會呈現不同的性能分佈，如圖 4 所示，設計 x_1 比設計 x_2 具有較小的公稱目標函數值，但 x_1 對設計參數的變異較為敏感，也就是說 x_1 的性能輸出會因為變異分佈而使性能輸出值的浮動 Dy_1 相當大，相對的，設計 x_2 就具有較集中的性能輸出 Dy_2 ，亦即對變異的敏感度較小。另一方面，當輸出 y 的分佈呈不對稱時，如圖 4 的設計 x_3 ，其平均輸出 \bar{y}_3 與公稱輸出值 y_{3n} 將會有相當的差異。因此極小化公稱目標函數值 y_n ，並不能達成品質的要求，修改目標函數的定義是達成性能穩健化最直接的方法，使其同時對平均輸出與變異量進行極小化。

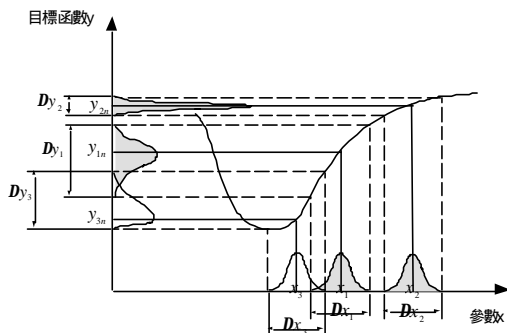


圖 4 不同的統計分佈相對於不同的性能輸出

設計變異模態

製造誤差與操作環境，往往造成設計參數產生各式的統計分佈，這種參數間的分佈關係，稱之為設計變異模態 (Design Variation Pattern, DVP)，DVP 往往因不同的設計或製造程序而呈獨特的模態，而這些變異可能為相互獨立或具關聯性，其分佈特性，一般約可分為 (圖 5)：

- (1) 無相關：參數間彼此無相關性、各自獨立。
- (2) 正向相關：參數間呈某種函數的關係，一參數隨另一參數的增加而增加。
- (3) 負向相關：參數間呈某種函數的關係，一參數隨另一參數的減少而減少。

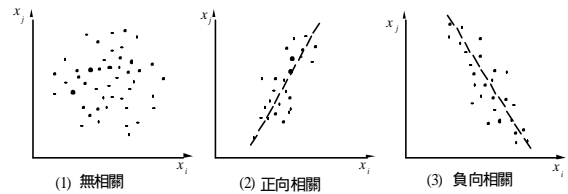


圖 5 參數間相關性與分佈模態的特性

一般學者進行穩健化研究的過程中，往往採用最差情況 (Worst Case Region, WCR) 來描述參數分佈，因此設計參數交絡的分佈形狀呈矩形體，如圖 6(a) 所示。然 WCR 並不考慮設計參數的統計分佈情況，當設計參數分佈同時位於兩側邊時，亦即矩形體的角落，其聯合分佈機率非常小處，幾乎不可能發生，而 WCR 也忽略了參數變異可能存在的相關性。

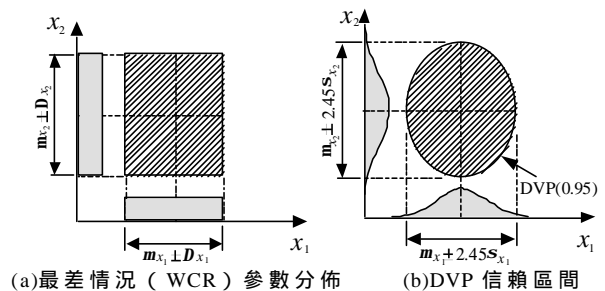


圖 6 WCR 與 DVP 的參數分佈

本文應用統計多變數迴歸的方法 (Johnson and Wichern, 1988) 推導參數組合的信賴區間，對於 p 個參數之變異矩陣 (variance-covariance matrix) 及相關係數 (correlation coefficient) 可寫為 (4) 式及 (5) 式：

$$S = E[(X - M)(X - M)^T] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$M = [E(x_1), E(x_2), E(x_3), \dots, E(x_p)]^T = [m_1, m_2, m_3, \dots, m_p]^T$$

$$r_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}}\sqrt{S_{jj}}} \quad (5)$$

當 x_1, x_2, \dots, x_p 為常態分配，而其分佈之平均值 M 與變異矩陣 S 已知時， p 個隨機參數的平方和將呈現自由度為 p 的卡方分佈。

$$(X - M)^T S^{-1} (X - M) \sim c_p^2 \quad (6)$$

$(X - M)^T S^{-1} (X - M) \leq c_{p,a}^2$ 代表 X 的 (1-) 100% 信賴區間，其信賴區間邊界所圍成的分佈區域稱為設計變異模態 DVP (1-)，如圖 6(b)，而 $(X_p - M)^T S^{-1} (X_p - M)$ 稱為分佈中的任一點 X_p 與平均值 M 的誤差距離，對於產品品質的特性，可以品質誤差距離作為檢定標準。藉由矩陣運算我們可將式(6)的左半部改寫如下：

$$(X - M)^T \Sigma^{-1} (X - M) = (Y - M_y)^T \Lambda^{-1} (Y - M_y) \quad (7)$$

$$\text{其中 } Y = E^T X, M_y = E^T M$$

$$E = [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \cdots \quad \bar{e}_p], L = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_p \end{bmatrix}$$

\bar{e}_i 為 S 的單位特徵向量 (unit eigenvectors)

I_i 為 S 的特徵值 (eigenvalues)

所以 DVP 的函數可表為

$$\frac{(y_1 - y_{1c})^2}{I_1 c_{p,a}^2} + \frac{(y_2 - y_{2c})^2}{I_2 c_{p,a}^2} + \cdots + \frac{(y_p - y_{pc})^2}{I_p c_{p,a}^2} = 1 \quad (8)$$

由(8)式可得知，變異模態為一以 M 為中心的橢圓體，其中 S 的特徵向量為橢圓體的軸向，而軸長大小則為 S 的特徵值與信賴度卡方分佈值的函數。以二維參數為例，其 DVP 如圖 7 所示。

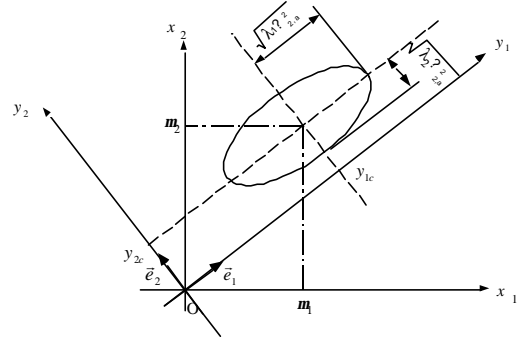


圖 7 二維參數之 DVP 分佈形狀

對於不同的信賴度 (1- α)，會有不同的卡方值，信賴度要求愈高其模態的形狀也會愈大，而參數相關性會影響 S 的特徵值與特徵向量，進而決定模態的歪斜的情況，而設計的穩健性與合理性直接與設計參數的變異模態有密切關係，圖 8 表示信賴度要求與變異相關性對 DVP 形狀所造成的影響。

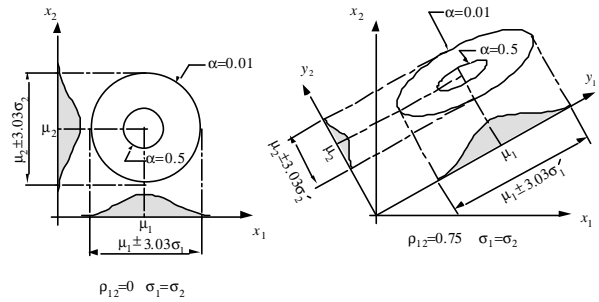


圖 8 不同相關係數下的 DVP

設計變異球體

設計變異模態 (DVP) 會隨參數變異的相關性而有不同的形狀，因此在合理性穩健化過程中，限制條件的修正量也會隨變異模態的相對位置不同而改變，造成運算上的困擾。本文利用“座標轉換”法，使變動的統計誤差距離轉換為固定的變異半徑，簡化限制條件修正量的演算過程。參數變異模態的表示式為：

$$(X - X_c)^T S^{-1} (X - X_c) = c_{p,a}^2 \quad (9)$$

因 S 為一實數對稱矩陣，故必存在正交矩陣 E ，可將 S 對角線化，所以

$$\begin{aligned} E^{-1} S E &= E^T S E = L \\ S &= E L E^{-1} = E L E^T \end{aligned} \quad (10)$$

其中 E 與 L 的定義同(7)式

將(10)式代入(9)式化簡得

$$[E^T(X - X_c)]^T L^{-1} [E^T(X - X_c)] = c_{p,a}^2 \quad (11)$$

因 L 為對角線形矩陣 (diagonal matrix), 且 S 為正定矩陣, 所以 L 的所有對角線元素皆正數:

$$\text{令 } L^{-1} = [VIV]^{-1} \quad (12)$$

而 V 亦為對角線形矩陣, 令 $Y = E^T X$ 代入(12)式

$$(Y - Y_c)^T V^{-1} V^{-1} (Y - Y_c) = c_{p,a}^2 \quad (13)$$

$$\text{令 } Z = V^{-1} Y = V^{-1} E^T X \quad (14)$$

$$\text{所以, 可得參數 } X \text{ 與轉換參數 } Z \text{ 的關係式:} \\ X = EVZ \quad (15)$$

轉換後之函數為:

$$(Z - Z_c)^T (Z - Z_c) = c_{p,a}^2 \quad (16)$$

式(16)代表一以 Z_c 為中心, 半徑為 $\sqrt{c_{p,a}^2}$ 的超球體 (Hyper-Sphere), 我們稱此函數為設計變異超球體 (Design Variation Hyper-Sphere, DVHS), 而 $\sqrt{c_{p,a}^2}$ 稱為在 (1-) 100% 信賴度下的設計變異半徑 (Design Variation Radius)。

合理性穩健化

二階段穩健化搜尋法, 為研究設計合理穩健化的文獻常採用的方法, 其原理是在求得公稱最佳設計後, 將參數變異量加入限制條件, 包容因參數變異造成設計的不合理性, 再進行第二階段的穩健最佳化搜尋。本文所提出的設計合理穩健化搜尋策略是採用序列式的搜尋方式, 配合標準化的設計變異球體 (DVHS) 修正線性化的限制條件, 可直接進行穩健最佳化或配合二階段合理穩健化搜尋。

序列式最佳化

序列線性規劃法 (Sequential Linear Programming, SLP) 首先將目標函數及限制條件在起始設計點以一階泰勒展開式線性化, 再以線性規劃中的簡算法 (Simplex Method) 求解, 得到下一次迭代的設計點, 再將目標函數及限制條件在新設計點以一階泰勒展開式線性化。如此反覆以線性規劃子問題去近似原先的非線性規劃問題, 最終可趨近問題的最佳解。

序列二次規劃法 (Sequential Quadratic Programming, SQP) 將 SLP 中的移動步長的限制條件併入目標函數, 如此在演算迭代過程中, 即可自行定義移動步長的大小。SQP 之目標函數以二次泰勒函數近似, 而所有限制條件以一階泰勒展開式線性化, 以此每次迭代的子問題之序列近似法, 即稱為“序列二次規劃法”。

序列合理穩健化法

為簡化參數變異的演算, 先以座標轉換法求出 x 函數與標準化 z 函數的關係式, 將變異模態標準化成設計變異球體, 並將目標函數與限制條件由 x 函數轉換為 z 函數

$$f(X) = f[p(Z)] = F(Z) \quad (17)$$

$$g_i(X) = g_i[p(Z)] = G_i(Z) \quad (18)$$

$$X = p(Z), Z = [z_1, z_2, \dots, z_p]^T$$

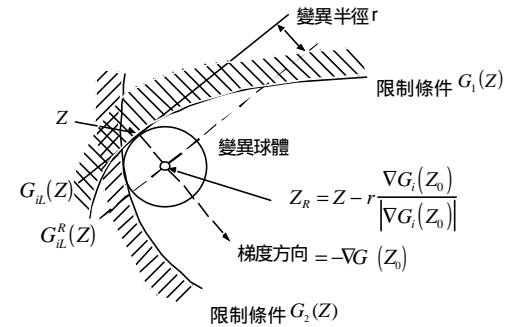


圖 9 以變異半徑修正限制條件

本文採用序列式搜尋方法中線性近似限制條件的概念, 再依設計變異半徑修正近似限制條件, 以確保設計的合理穩健性。在每一次搜尋的過程中, 限制條件的近似會因設計點的變動而改變, 其限制條件修正的步驟如下:

首先, $G_i(Z)$ 於 Z_0 點線性化可得 $G_{iL}(Z)$

$$G_{iL}(Z) = \nabla G_i(Z_0) \cdot (Z - Z_0) + G_i(Z_0) \quad (19)$$

以變異半徑 r 平移 $G_{iL}(Z)$ 上的 Z 點沿法線方向內移變異半徑 r 的距離至 Z_R , 由圖 9 所示, Z 與 Z_R 有以下的關係式 (20):

$$Z = Z_R + r \left(\frac{\nabla G_i(Z_0)}{|\nabla G_i(Z_0)|} \right) \quad (20)$$

其中 Z_0 為起始設計點

$\nabla G_i(Z_0)$ 為 $G_i(Z)$ 於 Z_0 的梯度向量

r 為變異半徑

Z_R 為線性近似限制條件上的點沿負法線方向內移距離 r 之後的點集合

將(20)式代入(19)式, 可得平移後的線性方程 $G_{iL}^R(Z_R)$

$$G_{iL}^R(Z_R) = \nabla G_i(Z_0) \cdot (Z_R - Z_0) + r \frac{\nabla G_i(Z_0) \cdot \nabla G_i(Z_0)}{|\nabla G_i(Z_0)|} + G_i(Z_0)$$

Z_R 只是代表一變數, 因此可以 Z 直接替代, 經簡化可得限制條件的修正方程式(21)

$$G_{iL}^R(Z) = \nabla G_i(Z_0) \cdot (Z - Z_0) + r |\nabla G_i(Z_0)| + G_i(Z_0) \quad (21)$$

比較(21)式與(19)式可得知

$$G_{il}^R(Z) = G_{il}(Z) + r \cdot |\nabla G_i(Z_0)| \quad (22)$$

其中 $r \cdot |\nabla G_i(Z_0)|$ 為線性近似函數包容 DVHS 所需的修正量

因此序列合理性最佳化在每一次序列最佳化的過程，便以(22)式修正限制條件，以確保所得的結果將滿足合理性的信賴度要求(1-)100%，而其執行過程相當單純，可直接結合 SLP/SQP 的程式進行合理性穩健化。

合理性穩健化數值例

假設簡單的二變數求最小值之最佳化問題 (徐業良, 1995, p191) 如下:

$$\begin{aligned} \min. \quad & Obj = -2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 25 \leq 0 \\ & g_2 = x_1^2 - x_2^2 - 7 \leq 0 \end{aligned}$$

假設參數呈常態分佈，標準差為 $s_1 = 0.05$ 與 $s_2 = 0.3$ ，且參數間具有關連性 $r_{12} = 0.75$ ，採信賴度為 90%。表 1 分別列出公稱最佳值、Parkinson(統計變異係數 $k=2$)與序列穩健化法所得之輸出值。

表 1 最佳設計值與合理穩健設計值

	公稱最佳化設計值	Parkinson	序列合理穩健化
參數 x_1	4.0	3.5084	3.496
參數 x_2	3.0	3.0005	2.906
函數輸出值	-11.0	-10.017	-9.898
不合理機率	0.9524	0.0518	0.0307

由表 1 所示，其中公稱最佳設計為不可行的設計，因其不合理機率高達百分之九十五。為求取合理性，序列合理穩健化與應用 Parkinson 方法所得結果，因向合理區內部移動，二者目標函數值差異不大。但因序列合理穩健化能調整設計變異模態，以考量參數間的相關性，所得設計點能在最少的性能損失下，確保設計結果的合理性。

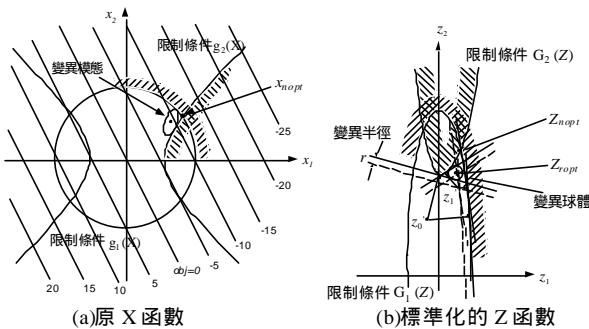


圖 10 變異模態與限制條件的標準化

性能穩健化

設計性能穩健性的估算

Taguchi (1979) 提出有限項函數值的單一權重和來估計常態分佈參數的期望值與標準差。二點近似法採用 $m \pm s$ 與權重為 1/2 的線性和來近似。三點近似法則採用 m 與 $m \pm \sqrt{3/2}s$ ，權重皆為 1/3。Taguchi 提出的方法對於期望值的估計有相當大的方便性，然而在設計參數間有相關性或系統具有較高的非線性時，其輸出變異數 (Variance) 近似值的精準度將降低。D'Errico 和 Zaino (1988) 則採用高斯積分法 (Gaussian integration) 對非線性函數求出適當的高斯積分點與權重，以求得較精準的近似值。但這些方法採用全因子試驗的估計點，輸出函數的的估算次數將會隨參數數目的增加而呈指倍數增加，當輸出函數的計算牽涉到實際的實驗時，將會變得十分費時。

本文結合變異球體、二水準部份因子與田口二點近似法來估算期望值與變異量，因參數間可能存在相關性，而在變異模態標準化後的 z 參數可想像為獨立的標準常態分佈，故在因子水準的選定上應在模態標準化的 Z 參數為之，標準化後的標準差變為 1，故其二水準的因子點為 $z_{ej} \pm 1$ 。如圖 11 所示，其估計式可表示為：

$$E(y) \cong \frac{\sum_{i=1}^n y(Z_i)}{n} = \bar{y} \quad (23)$$

$$Var(y) \cong \frac{\sum_{i=1}^n (y(Z_i) - E(y))^2}{n} \cong \frac{\sum_{i=1}^n (y(Z_i) - \bar{y})^2}{n} \quad (24)$$

$y(Z_i)$ 為在 Z 參數部份因子試驗的輸出， n 為直交表的實驗次數

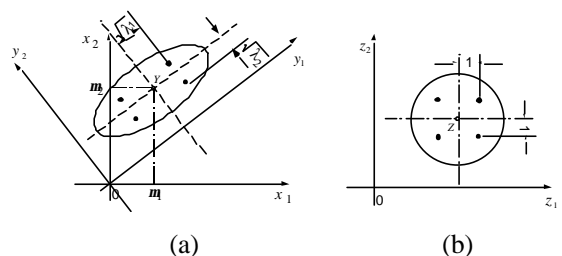


圖 11 以變異球體估計性能輸出

以上述的策略進行穩健性估算雖較全因子方法產生較大的誤差，但部份因子的選用卻可大量的減少試驗次數。

性能穩健最佳化策略

本文所提出的性能穩健化策略，是以修改目標函數為公稱最佳輸出值與直交表模擬輸出值間差的均方和，將目標函數最小化，可同時求取輸出期望值平方與變異數的極小值，修正後的目標函數可表示為（25 式）：

$$\text{Minimize } f(Z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(Z_i) - y_{nopt})^2 \quad (25)$$

將(25)式進行展開

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(Z_i) - y_{nopt})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(Z_i) - \bar{y} + \bar{y} - y_{nopt})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(Z_i) - \bar{y})^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (y(Z_i) - \bar{y}) \cdot (\bar{y} - y_{nopt}) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_{nopt})^2 \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\sum_{i=1}^n \frac{y(Z_i)}{n} = \bar{y}$ ，所以(26)式之第二項為 0：

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(Z_i) - y_{nopt})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(Z_i) - \bar{y})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_{nopt})^2 \\ &= s_y^2 + (\bar{y} - y_{nopt})^2 \end{aligned} \quad (27)$$

其中 n ：為直交表實驗次數

$y(Z_i)$ ：是在參數 Z 以二水準直交表模擬的輸出值

y_{nopt} ：為第一階段最佳化過程中所得之公稱最佳值

\bar{y} ：為以直交表所估算的性能輸出平均值

s_y^2 ：為以直交表所估算的性能輸出變異數

由(27)式可得知，修正後的目標函數包含兩部份：輸出變異量及平均輸出與公稱最佳值的差平方，因此在極小化此目標函數旨在公稱最佳值的附近，搜尋穩健性高的設計。

性能穩健化數值例

以最小化齒輪列轉動慣量的設計數值例（Fenton and Eason, 1974）說明性能穩健化。其最佳化數學式可表為：

$$\text{min. } f(x_1, x_2) = \frac{12 + x_1^2 + \frac{1 + x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 x_2^2 + 100}{(x_1 x_2)^4}}{10}$$

假設參數呈常態分佈 $s_1 = s_2 = 0.20$ ，且參數間具有關連性 $r_{12} = 0.50$ ，以公稱最佳設計、Sundaresan 之性能穩健法與 ROP 法，所得之設計值比較。

表 2 齒輪列轉動慣量的設計輸出值

	公稱最佳設計	Sundaresan	ROP
參數 x_1	1.744	1.778	1.798
參數 x_2	2.032	2.083	2.047
公稱輸出值	1.7442	1.7455	1.7457
期望輸出值	1.7808	1.7763	1.7768
輸出標準差	0.0737	0.0556	0.0565

由表 2 可得知，ROP 法與 Sundaresan 法雖然在公稱目標函數的輸出上有些微的增加，但在平均性能輸出上皆優於公稱最佳設計。以 ROP 法與公稱最佳設計相較，在標準差上，縮小了 23.3%。由此顯示 ROP 法能於穩健化搜尋的過程中，找出性能穩健最佳值。

電腦輔助穩健最佳化設計與實例

我們結合序列合理性穩健化策略、性能穩健化策略與傳統最佳化搜尋軟體 DOT（Vanderplaats, 1993），藉由 Multimedia ToolBook（1994）視窗介面軟體，發展出穩健最佳化程式 ROP，以提高穩健最佳化的實用性與方便性。序列穩健化近似法的流程架構如圖 13。

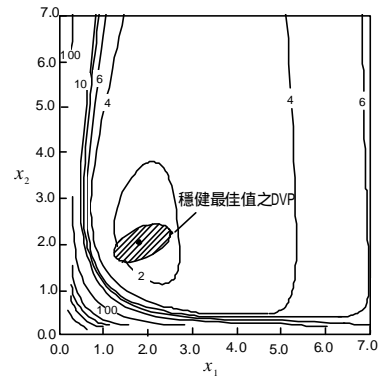


圖 12 參數變異模態與目標函數等高線曲線圖

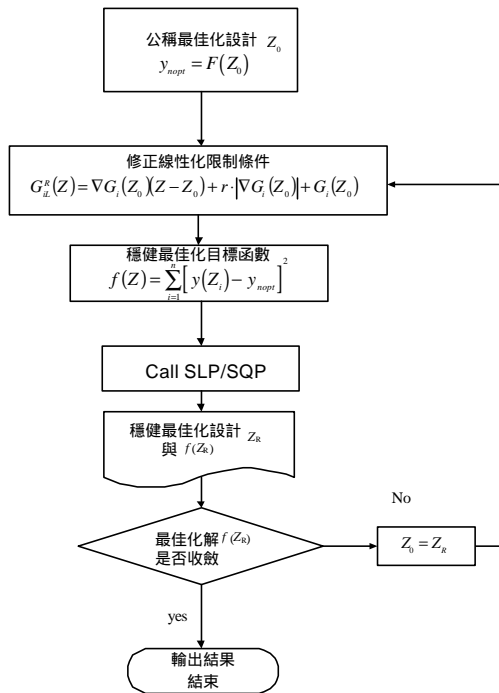


圖 13 序列穩健化法之流程圖

螺旋彈簧之設計應用例

螺旋彈簧的使用在工程應用很廣，因此，將以彈簧的設計做為工程應用例（Fox, 1971, p35-p36），進行穩健最佳化與 ROP 軟體的應用說明。

問題敘述：螺旋彈簧受一定負荷 F_0 力（圖 15），將彈簧由由高度 h_{free} 壓縮至 h_0 後，再施以一反覆壓縮（Released compression）負荷 F_{rc} ，在已知受定負荷 F_0 時之彈簧長 h_0 與反覆壓縮量 d_0 時，設計能承受最大的固定壓縮負荷 F_0 螺旋彈簧。

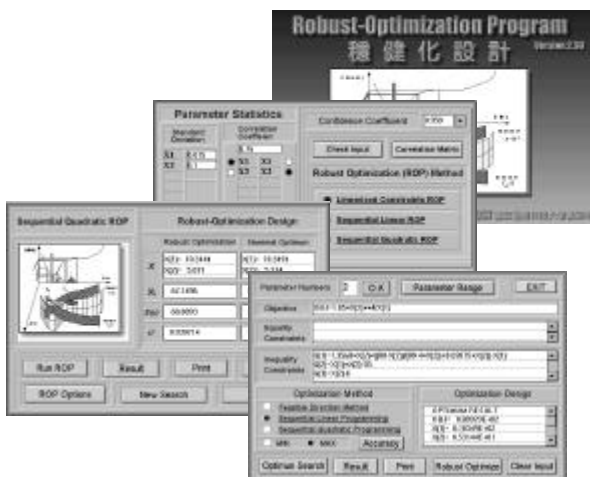


圖 14 ROP 程式界面

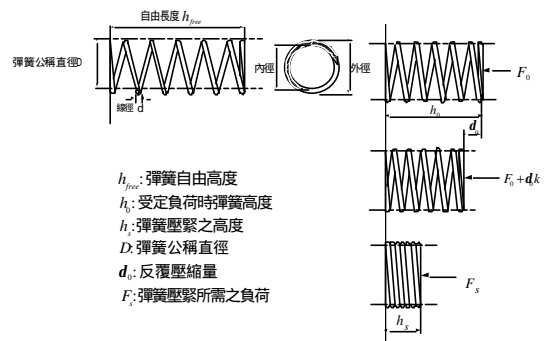


圖 15 彈簧設計示意圖

選用材料特性：

彈簧鋼橫向彈性係數約 $G = 8.4 \times 10^3 \text{ Mpa}$

彈簧鋼容許應力約 $s_w = 84 \text{ Mpa}$

彈簧鋼疲勞強度約 $s_e = 42 \text{ Mpa}$

設計參數之限制條件：

自由高度 $h_{free} = 66 \text{ mm}$

受定負荷時彈簧高度 $h_0 = 58 \text{ mm}$

彈簧外徑 $D_m \leq 27 \text{ mm}$

反覆壓縮量 $d_0 = 5 \text{ mm}$

安全係數 $S_f = 1.1$

因此彈簧設計的最佳化可表示成下列函數：

$$\text{Max. } F_0 = K_s \mathbf{d} = \left(\frac{Gd^4}{8D^3n} \right) (h_{free} - h_0)$$

$$\text{Subject } \left(\frac{s_m - s_a + s_a}{s_w} + \frac{s_a}{s_e} \right) \leq \frac{1}{S_f}$$

$$nd \leq (h_0 - d_0)$$

$$D + d \leq 27$$

$$D, d, n > 0$$

而彈簧因製造與環境變化所造成的參數分佈標準差估計為： $s_n = 0.015$ 圈、 $s_d = 0.1 \text{ mm}$ 、 $s_D = 0.25 \text{ mm}$ 。因彈簧設計參數可能因製造誤差與操作環境溫度等影響而產生相關性，例如：彈簧線徑變異與公稱直徑變異可能因熱處理而膨脹，而彈簧圈數卻減小，即彈簧線徑與彈簧圈數變異可能受熱處理的影響而呈反向關聯性；而彈簧公稱直徑變異與彈簧線徑之變異則可能呈正向關聯。表 3 為彈簧例以傳統最佳化設計法 P.&S. 法（Parkinson 的修正限制條件法配合 Sundaresan 的性能穩健法，目標函數權重 $g = 0.5$ ）與 ROP 法（ $a = 0.75$ ），分別針對假想關聯係數為 $r_{nd} = -0.75$ ， $r_{nD} = -0.75$ ， $r_{dD} = 0.4$ 的情況，探討上述方法於合理性穩健化與性能穩健化的差異。為評估各穩健設計值合理穩健性，採用蒙地卡羅模擬的方式，取

100000 個隨機常態分佈設計點，測試各方法所得之設計值落入不合理區的機率及其輸出期望值與標準差作為比較標準。

表 3 螺旋彈簧設計結果比較

	公稱最佳值	P. & S.	ROP
n	9.466	9.6748	9.654
d (mm)	5.599	5.28159	5.30
D (mm)	21.401	21.1799	21.084
公稱輸出(N)	88.985	71.109	73.229
期望值 (N)	89.114	71.253	73.353
標準差 (N)	5.911	5.003	5.121
不合理機率	0.802	0.054	0.054

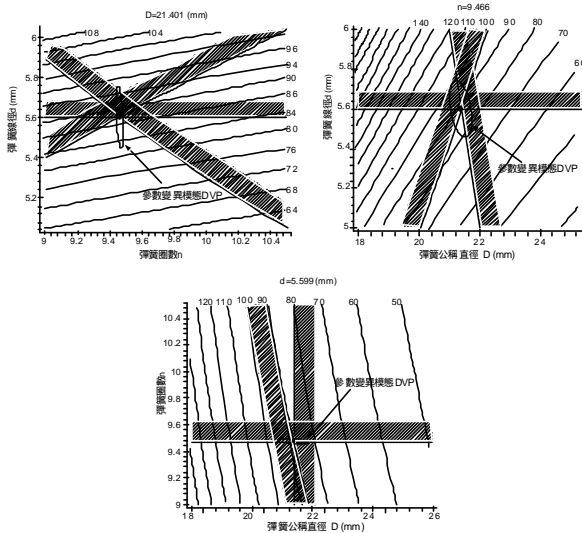


圖 16 限制條件與目標函數等高線曲線圖

在合理性穩健化方面，由表 3 可知：穩健化設計為包容設計不確定性而將設計點向合理區內部修正，導致二者在期望輸出值都較公稱最佳設計為差，但公稱最佳設計有約百分之八十的不合理性(圖 16)，ROP 法與 P.&S.法所得到的設計合理穩健性均較公稱最佳設計為佳，不合理機率只有約 5%。在性能穩健化方面，為滿足設計合理穩健性，最大的固定壓縮負荷的期望輸出值較公稱最佳設計為低，但 ROP 的穩健化設計在輸出的分佈標準差較公稱最佳設計減少 13.4%。另以 ROP 法所得的設計最大承受負荷在標準差方面雖較應用 P.&S.方法所得結果稍大 0.1 (N)，但在期望輸出方面卻較 P.&S.法提高 2.1(N)，可看出 ROP 法的優越性。而另一方面，由於彈簧設計例之目標函數等高線之分佈屬於較為平緩型，因此在公稱最佳值附近的設計點對於參數誤差的敏感度變化不是很大，當應用例公稱最佳值附近對輸出的非

線性度增加時，採用 ROP 穩健最佳化所得的改善將更形明顯。

結 論

本文針對最佳化過程中，因製造、操作誤差與使用環境改變所造成的設計變異模態對設計性能與合理性所造成的不確定性進行探討，提出合理性穩健化與性能穩健化的策略。利用座標轉換將設計變異標準化，以設計變異半徑修正限制條件，並結合近似合理穩健法使設計值包容設計變異所造成的不合理性，針對輸出分佈提出修正目標函數，以縮小輸出變異，達到性能輸出穩健化，最後整合性能與合理穩健化策略撰寫出一套視窗式的穩健最佳化軟體 (Robust Optimization Program, ROP)，簡化了穩健最佳化的實行步驟，文中並實際以數值例與工程應用例進行驗證分析，並與其他學者所提之方法比較，顯示本文所提之策略具有其優越性與實用性。

參 考 文 獻

- D'Errico J. R. and Zaino, Jr. N. A. (1988) , " Statistical Tolerancing Using a Modification of Taguchi' s Method." , *Technometrics*, 30(4), p.397-405
- Fox, R. L. (1971) , *Optimization Methods for Engineering Design*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Faires, V. M. (1965) , *Design of Machine Element*, 4 th Edition, Macmillan
- Fenton R. and Eason E. D. (1974) , " A Comparison of Numerical Optimization Methods of Engineering Design" , *Transactions of the ASME*, February, p.196-200.
- Multimedia ToolBook* Version 3.0a (1994) Asymetrix Corporation
- Parkinson, A. (June 1995) , "Robust Mechanical Design Using Engineering Models" , *Transactions of the ASME* , Vol. 117, p.48-54
- Richard A. Johnson (1988) *Applied Multivariate Statistical Analysis* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey
- Siddall, J. N. (1984) , "A New Approach to Probability in Engineering Design and Optimization." , *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 106, 5-10
- Spotts, M.F.(1985) , *Design of Machine Elements*, 6th Edition, Prentice-Hall
- Sundaresan, S., Ishii, K. and Houser, D. R. (1993) , "A Robust Optimization Procedure With Variations on Design Variables and Constraints" , *Proc. of ASME Advance in Design Automation Conference*. Sept. 20-22, Albuquerque, NM. Vol. 65-1, p.379-386
- Taguchi, G. and Wu, Y. (1979) , *Introduction to Off-line Quality Control.*, Tokyo, Japan: Central Japan Quality Control Association.

Vanderplaats, Miura & Associate (1993) , *Dot User Manual*,
Version 4.0, VMA Engineering
Yu, J. and Ishii, K. (1998) , “Design for Robustness Based on
Manufacturing Variation Patterns”, *ASME Journal of
Mechanical Design*, Vol. 120, p.196-202
徐業良 , “ 工程最佳化 ” , 宏明書局 , 民國八十四年

ROBUST DESIGN OPTIMIZATION USING DESIGN VARIATION HYPER SPHERE

**Wen-Chung Ho
Jyh-Cheng Yu**

Department of Mechanical Engineering
National Taiwan University of Science and Technology
Taipei, Taiwan 106, R.O.C.

ABSTRACT

This paper addresses the constraint uncertainty and output deviation in the optimization processes due to the variation of design parameters in the product life cycle. Quality design seeks both the robustness of performance optimality and design feasibility. This research first elaborates the formulation of Design Variation Pattern(*DVP*). The *DVP* is then transformed to a Design Variation Hyper Sphere(*DVHS*)to simplify the process of the constraint modification in the following robust optimization. The proposed methodology suggests a two-stage optimization scheme. After locating the nominal optimum, our scheme adopts the *DVHS* to modify the feasible design region and applies the sequential approximate method (*SLP/SQP*) to accommodate the activity uncertainty due to parameter variation. The objective function is reformed to be the mean sum of squares of the difference between the nominal optimum output and the simulated scattered output using an orthogonal array. The revised window application *ROP* is then proposed for the facilitation of robust optimization.

Keywords: Design Variation Pattern, Variation Hyper Sphere, Sequential Approximate Method, Feasibility Robustness, Performance Robustness, Taguchi.