

三軸式壓電微加速度計之設計與系統建模

余志成^{1*}、李炯達²、張喬凱³

¹ 國立高雄第一科技大學機械與自動化工程學系副教授

² 義守大學機械與自動化工程學系副教授

³ 義守大學機械與自動化工程學系研究生

摘要

本文提出可偵測三軸向加速度之壓電微加速度計；此結構採用<100>矽材分別由溼式與乾式蝕刻出一中央振動質塊及其左右四根支撐懸樑，及 8 個壓電轉換單元。當振動質塊受不同軸向加速度作用時，會產生對稱、非對稱和扭轉三種不同的運動模態，而使支撐懸樑產生不同的撓曲現象。使得樑上壓電薄膜所受應力跟隨懸樑變形而改變，再以適當的電極連結設計，可個別量測三軸向的加速度。本文使用能量法-卡氏第二定律求得各模態的位移量，並配合虎克定律得到各模態下的懸樑系統剛性與機械敏感度。接著利用懸樑變形理論積分求得各模態壓電薄膜所產生的電荷，推得電性敏感度與各模態運動下的整體系統轉移函數。最後利用 ANSYS 軟體模擬靜態、動態運動模態下的機電特性，驗證理論分析的正確性。相較於有限元素分析，理論模式誤差皆小於 3.2%，並可有效地量測三軸加速度，證實元件設計可行性與模型推導的正確性。

關鍵字：微感測器，壓電加速度計，三軸加速度，壓電薄膜。

1. 前言

微加速度計已成功在汽車工業廣泛使用，例如汽車安全氣囊、懸吊系統及互動式娛樂電子等。壓電式加速度計具有機電能互換的特性，量測訊號較為線性且具有較高的自然頻率，因此有較大的頻寬來提昇量測性能，由於壓電式加速度計亦具有良好的動態特性及線性化，因此廣泛使用於機械系統的振動監控量測。

加速度結構設計常利用懸樑結構來支撐振動質塊，Van Kampen 和 Woffenbuttel 分析多懸樑結構，並分析體狀微矽加速度計的靜態與動態機械特性[1]；在單軸加速度計的研究上：Yu 等人及 Wang 等人[2,3]分別提出單軸向加速度器方面之研究。其中，Yu 等人針對 PZT 壓電薄膜加速度計進行參數設計的模擬分析，其幾何結構以『十』字懸樑支撐島狀中央振動質塊，利用質塊的位移使懸樑產生變形，由樑上佈置的壓電薄膜 PZT 當傳感元件。此外，厚膜加速度計的研究如 Beeby 等人[4]提出利用厚膜 PZT 結合矽基微機械製作的微加速度計。近年許多研究相繼提出三軸向加速度

計的探討，上述探討僅探討單軸向加速度量測，並未提出三軸向的探討。接著，Kunz 等人[5]探討十字懸樑結構所組成的微型雙軸式壓電薄膜加速度計，利用 FEM 模擬並實驗製作下的懸樑應力分佈。近期，Hindrichsen 等人利用『十』字懸樑支撐島狀中央振動質塊探討雙軸式加速度計的設計[8]。此兩篇的探討僅是探討出兩種形式的運動模態並無第三種方式的運動型情形發生；Zhu 等人[6][7]利用 Lagrange's equation 探討三軸微加速度計，其中探討的彎曲運動，利用 FEM 驗證其理論設計與模擬結果相符合，並且分析修改其結構尺寸對於敏感度與頻率響應之間的關係，其結果並無探討電性分析的探討。

本文將提出一簡單幾何結構配合壓電轉換單元配置設計，以量測三軸向加速度。由樑變形與能量法-卡氏第二定律，並配合壓電薄膜機電轉換積分進行感測計的系統建模，並以有限分析法驗證設計的可行性與建模的正確性。

2. 微加速度計設計

本文提出的微加速度計是由四根懸臂樑、一中央質塊與八片壓電轉換器所構成如圖 1 所示，微加速度計的製作是選用<100> SOI 矽材料，以體型微加工濕蝕刻出概似截頂金字塔形狀的中央質塊，其蝕刻角度為 54.74°；『H』懸樑部份是使用微製造技術中的反應離子蝕刻 DRIE (deep reactive ion etching) 乾蝕刻技術製作而成。

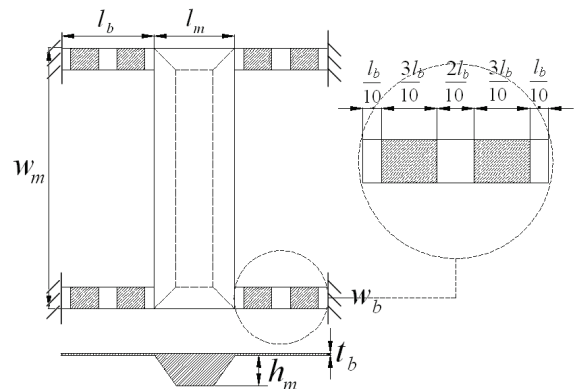


圖1 微加速度計之初始結構尺寸(單位: μm)

電極配置方面，out-of-plane (z 軸)的加速度將使系統結構發生對稱性的振動模態，而 in-plane (x 與 y

軸) 加速度產生非對稱性及扭轉的振動模態, 慣性力造成懸樑的彎曲應力使得 PZT 壓電材料產生電荷, 由此訊號轉換得知加速度大小, 電極的配置與連結如表 1 所示, 使得 out-of-plane 加速度與 in-plane 加速度可以選擇性的量測而得。以量測 Z 軸加速度為例, 如圖 2(a), 此時內部的轉換器(近振動質塊)和外部的轉換器有相反的應力方向, 若將轉換器 1, 4, 5 及 8 相加後減去轉換器 2, 3, 6 及 7 的和可量得 out-of-plane 加速度, 反之, in-plane 加速度所產生的轉換訊號將會互相抵消, 這個設計不僅增加了感測器的敏感性, 同時減少了雜訊干擾。而其他兩個 in-plane 加速度則可分別依表 1 的電極安排而量測出來。

表1 三軸加速度感測之電極配置

Symmetric	PZT(1+4+5+8) - PZT(2+3+6+7)
Asymmetric	PZT(2+4+6+8) - PZT(1+3+5+7)
Torsional	PZT(1+4+6+7) - PZT(2+3+5+8)

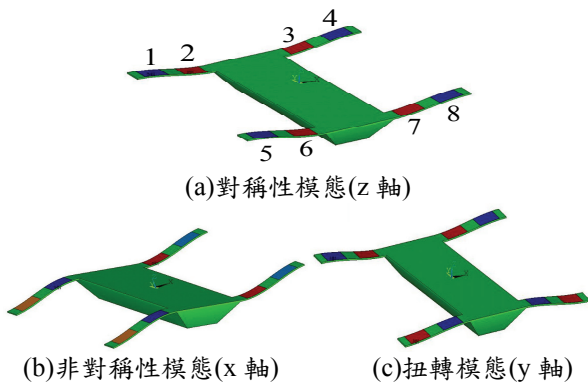


圖2 三軸加速度造成的三個基本振動模態

3. 三軸式微加速計結構模態之理論建模

此感測器的建模可概分為機械和電性兩個次系統, 機械系統方面懸樑剛性和振動質塊決定其機械特性, 而壓電薄膜之壓電性能及其配置連結決定電性系統特性[2]。

本文在機械結構部分應用能量法-卡氏第二定律如方程式(1)和(2), 推導出加速度計於不同的運動模態下結構懸樑在彎矩及扭轉時之變形量:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad (1)$$

$$\alpha_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} \quad (2)$$

其中 U 為結構應變能, F_i 及 M_i 為質塊端作用於懸樑的力及力矩, δ_i 及 α_i 分別為懸樑承受相對應外力在質塊端所發生的垂直撓曲與力偶作用下的旋轉角。

加速度計負荷由質塊的慣性力形成, 並應用虎克定律 $K=F/\delta$ 、 $K_\theta=M/\alpha$ 求得彈性係數。此外, 振動模態的運動方式可由牛頓第二運動定律推導出運動方程

式, 並得知特性方程式。因此, 正向及扭轉模態的自然頻率可表示如式(3)和(4)。

$$\omega_{n,n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (3)$$

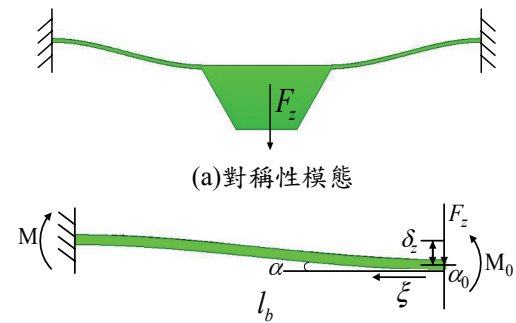
$$\omega_{n,t} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_\alpha}{J}} \quad (4)$$

方程式中 m 及 J 分別為質塊質量與轉動慣量。因振動島塊以化學濕蝕刻, 因而呈現截頂金字塔的形狀, 在忽略蝕刻不完美的角落並簡化整體質塊後, 利用體積分方法可求得質量為:

$$m = \rho \cdot \left[l_m w_m h_m - h_m^2 (l_m + w_m) \cot \theta + \frac{4}{3} h_m^3 \cot^2 \theta \right] + \rho \cdot l_m w_m t_b \quad (5)$$

ρ 為矽材密度; $\theta = 54.7^\circ$ 為 $\langle 100 \rangle$ 矽基非等向蝕刻角度; l_m 、 w_m 、 h_m 與 t_b 如圖 1 所示分別為質塊之長、寬、高與懸梁之板厚。

3.1. 對稱性模態



(b) 對稱性懸樑-自由體圖
圖3 對稱性運動模態

圖 3(a) 表示因 Z 方向加速度所形成的樑撓曲對稱 (Symmetrical) 模態。圖 3(b) 概示振動體左側懸樑放大圖, 圖上表示側向慣性力 F_z 作用於樑端時長度 l_b 之懸樑在緊臨質塊端將形成 δ_z 之變形量。樑之力矩平衡式可表示為

$$M + F_z \xi - M_0 = 0 \quad (6)$$

ξ 為圖 3 (b) 從自由端的距離。質塊受加速度 (a_z) 所產生慣性力 F_z 造成懸樑的變形, 配合邊界條件自由端變形量由卡氏定律可表示如下

$$\delta_z = \frac{\partial U}{\partial F_z} = \frac{F_z l_b^3}{12EI_z} \quad (7)$$

利用虎克定律可求得單一懸樑之彈性係數, 而本文所探討的微加速度計結構是由四根懸樑所組合而成, 故對稱性系統結構之懸樑彈性係數為:

$$K_s = \frac{48EI_z}{l_b^3} \quad (8)$$

其對稱模態之自然頻率

$$\omega_{ns} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_s}{m}} \quad (9)$$

由懸樑變形理論求得壓電薄膜之應變，並利用積分方法求得整個壓電轉換器所產生的電荷值

$$Q_s = \frac{18\delta_z t_b w_b d_{31} (c_{11} - \nu c_{12})}{5l_b} \quad (10)$$

其中 d_{31} 為壓電薄膜之縱斷壓電常數， c_{ij} 為勁度係數 (Stiffness Coefficient)，而 ν 為矽的浦松比。因此可求得單位島塊位移所產生之電荷 $K_{q,s}$ ，進一步推得電性敏感度

$$S_{e,s} = \frac{K_{q,s}}{C} \quad (11)$$

$C = \epsilon A / t_p$ 為 PZT 等效電容，其中 A 、 t_p 及 ϵ 分別為 PZT 壓電薄膜的表面積、厚度及壓電材料之介電係數。拉氏轉換可分別得其電性與機械轉移函數，最後將兩轉移函數結合並整理後，可得對稱運動模態之轉移函數如下

$$\frac{e}{a}(s) = S_{e,s} \cdot S_{m,s} \cdot \frac{\tau s}{\tau s + 1} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (12)$$

其中 $S_m \equiv m / K$ 為機械敏感度， m 、 K 分別為整體振動質塊質量及運動模態下的懸樑剛性。

3.2. 非對稱性模態

非對稱性振動模態中，質塊承受一通過質心且平行於 X 軸之慣性力 ($F_x = ma_x$) 如圖 4(a)，其懸樑的撓曲會產生如圖 4(b) 的非對稱模態，此外非對稱性模態之旋轉中心，設位於質塊上方薄板的 $0.5t_b$ 處對 Y 軸做旋轉。圖 4(c) 中概示單一懸樑由 F_x 作用於質量中心之慣性力在樑端所造成之變形含垂直位移與角位移量，因此振動體之剛性可視為兩種不同的彈簧並聯。

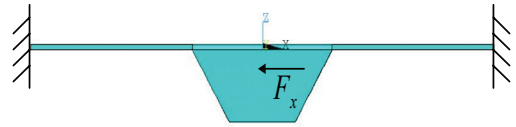
系統結構受彎曲應力所造成角位移之懸樑彈性係數為

$$K_{a,\alpha} = \frac{4EI_z(3l_m + 4l_b)}{l_b^2} \quad (13)$$

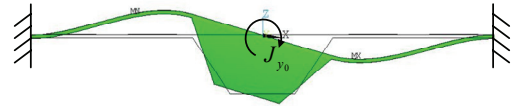
其垂直方向之彈性係數可寫為：

$$K_{a,\delta_{4b}} = \frac{48EI_z(l_m + l_b)}{l_m \cdot l_b^3} \quad (14)$$

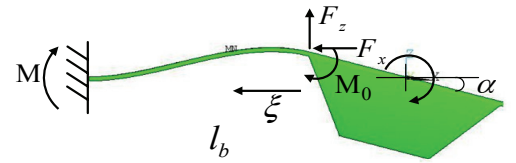
懸樑垂直剛性對於旋轉中心造成的等效扭轉剛性可表為



(a) 初始外力 F_x



(b) 非對稱性模態



(c) 非對稱性懸樑-自由體圖

圖4 非對稱性運動模態

$$K_{a,\delta} = \frac{12EI_z l_m (l_m + l_b)}{l_b^3} \quad (15)$$

故非對稱性結構模態之整體彈性係數 $K_{a,s}$ 可視為式(13)與式(15)之合即為 $K_{a,s} = K_{a,\alpha} + K_{a,\delta}$

$$K_{a,s} = \frac{4EI_z(3l_m + 4l_b)}{l_b^2} + \frac{12EI_z l_m (l_m + l_b)}{l_b^3} \quad (16)$$

而轉動系統之自然頻率如式(4)， K_a 為非對稱性整體系統彈性係數即 $K_{a,s}$ ； J 為非對稱性旋轉中心之質量慣性矩即整體質塊對旋轉中心之轉動慣量 $J_{y_0} = J_{y,h_m} + J_{y,t_b}$ ，故其非對稱性振動之自然頻率為。

$$\omega_{n,as} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{a,s}}{J_{y_0}}} \quad (17)$$

而仿照對稱振動的積分可求得整體壓電元件所產生的電荷為

$$Q_a = \frac{9\alpha t_b w_b d_{31} (c_{11} - \nu c_{12})(l_m + l_b)}{5l_b} \quad (18)$$

從單位轉動角度 α ，與 PZT 所產生的電荷 $K_{q,a}$ 可推得機械敏感度 $S_{m,a}$ 與電性敏感 $S_{e,a}$ 度分別為

$$S_{m,a} = \frac{J_{y_0}}{K_{a,s}} \quad (19)$$

$$S_{e,a} = \frac{K_{q,a}}{C} \quad (20)$$

由拉氏轉換可分別得其電性與機械轉移函數，故非對稱運動模態之系統轉移函數可表為

$$\frac{e}{a}(s) = S_{e,a} \cdot S_{m,a} \cdot \frac{md}{J_{y0}} \cdot \frac{\tau s}{\tau s + 1} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (21)$$

d 為旋轉中心與質心之距離，即 $\frac{2}{5}h_m + \frac{1}{2}t_b$

3.3. 扭轉模態

假設中央質塊受一加速度(a_y)所產生之慣性力 $F_y = ma_y$ 作用於質心位置如圖 5(a)。圖 5(b)中，由於 F_y 慣性力作用於質心時將造成質塊扭轉故可假設左右懸樑上具有方向相反的垂直力 F 。

整體懸樑的垂直位移量對於旋轉中心所造成之扭轉剛性可寫成

$$K_{t,\delta} = \frac{48EI_z}{l_b^3} \cdot \left(\frac{w_m - w_b}{2} \right)^2 \quad (22)$$

懸樑本身亦具有扭轉變形，然而本加速度計其懸樑截面為矩形的矩形樑，參照[9]懸樑扭轉時所產生剪變形之剛性即可寫為

$$K_{t,\alpha_b} = \frac{c_2 w_b t_b^3 G}{l_b} \quad (23)$$

式中 c_2 為矩形樑扭轉常數，其扭轉常數與懸樑截面之長寬比有關； $G=43.9\text{GPa}$ 為矽材剪彈性模數，本加速度計具有四根懸樑，扭轉系統結構受扭轉所產生剪應變之彈性係數為

$$K_{t,\alpha} = 4 \cdot \frac{c_2 w_b t_b^3 G}{l_b} \quad (24)$$

扭轉結構模態之整體彈性係數為

$$K_{t,s} = K_{t,\delta} + K_{t,\alpha} \quad (25)$$

其扭轉模態之自然頻率為

$$\omega_{n,ts} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{t,s}}{J_{x0}}} \quad (26)$$

$K_{t,s}$ 為扭轉模態下整體系統彈性係數；

$J_{x0} = J_{x,h_m} + J_{x,t_b}$ 為扭轉模態旋轉中心的質量慣性矩，而，電性推導如同非對稱模態，其系統模式為

$$\frac{e}{a}(s) = S_{e,t} \cdot S_{m,t} \cdot \frac{md}{J_{x0}} \cdot \frac{\tau s}{\tau s + 1} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (27)$$

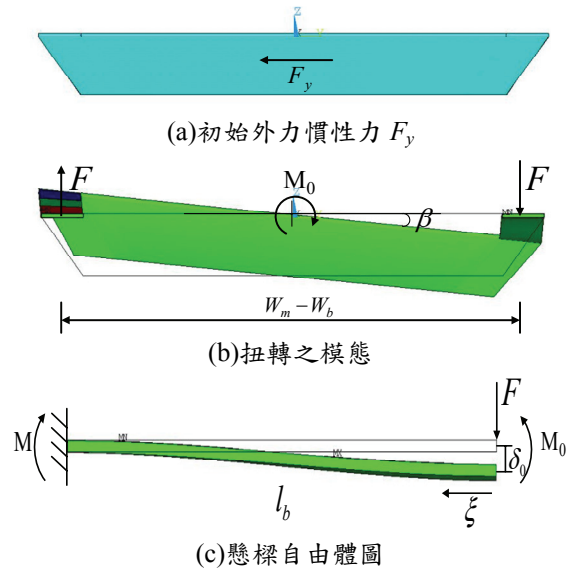


圖5 扭轉模態之運動模態

表2 三軸加速度計運動模態特性

	對稱性模態	非對稱性模態	扭轉模態
懸樑剛性	$K_s = \frac{48EI_z}{l_b^3}$	$K_{a,s} = K_{a,\alpha} + K_{a,\delta}$	$K_{t,s} = K_{t,\delta} + K_{t,\alpha}$
質量/轉動慣量	m	$J_{y0} = J_{y,h_m} + J_{y,t_b}$	$J_{x0} = J_{x,h_m} + J_{x,t_b}$
自然頻率	$\omega_{ns} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_s}{m}}$	$\omega_{n,as} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{a,s}}{J_{y0}}}$	$\omega_{n,ts} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{t,s}}{J_{x0}}}$
機械敏感度	$S_{m,s} = \frac{m}{K_s}$	$S_{m,a} = \frac{J_{y0}}{K_{a,s}}$	$S_{m,t} = \frac{J_{x0}}{K_{t,s}}$
電性敏感度	$S_{e,s} = \frac{K_{q,s}}{C}$	$S_{e,a} = \frac{K_{q,a}}{C}$	$S_{e,t} = \frac{K_{q,t}}{C}$
動態頻率響應	(12)	(21)	(27)

4. 有限元素分析驗證

本節以表3的元件尺寸為例，利用有限元素分析軟體ANSYS驗證上述各模態敏感度與自然頻率的推導，材料的參數特性可從過去的文獻[2]找得，二者比較結果列於表4與表5，兩者所得結果相當吻合，誤差皆在3.2%以下。此元件動態模擬中頻率響應如圖6，由於對稱振動模態的自然頻率是三個模態中最低的，故微加速度計的頻寬將受限於對稱性模態的共振頻率，一般頻寬的上限為 $(\omega_{ns}/5)$ ，此設計約650Hz。

本文將單軸方向單位加速度所得之壓電輸出值與三軸加速度同時施加所得之電壓值以 FEM 模擬比較，以驗證加速度感測之選擇性，表 6顯示二者所得之結果相同。當三軸向加速度同時發生時加速度計可分別測得各方向的加速度，此結果說明在適當的電極配置連結下本設計可應用於三軸向加速度量測且減少雜訊干擾。

5. 結論

本文提出幾何結構如『H』型之三軸向加速度計，藉由壓電轉換元件與電極的串併聯的設計，能獨立量測出三軸向的加速度。而藉由有限元素軟體驗證了所提出理論模式的正確性，兩者所得結果相互吻合，也能準確的量測出三軸的加速度，其敏感度誤差皆小於3.2%。由於初始尺寸下的三軸向加速度計三軸間敏感度差異過大，未來可利用田口實驗計劃，探討尺寸結構尺寸的變化來降低三軸之間敏感度。

表3 微加速度計的初始尺寸

l_b	w_b	t_b	l_m	w_m	h_m
1500	350	30	1300	4200	490

(單位: μm)

表4 理論 ω_n 與 ANSYS 模擬結果比較

model	理論值	FEM 值	誤差百分比
symmetric	3221	3212	0.3%
asymmetric	11990	11648	2.8%
torsional	5459	5515	1.0%

(單位: Hz)

表5 理論輸出電壓與 ANSYS 模擬結果比較

model	理論值	FEM 值	誤差百分比
symmetric	6.13	6.29	2.5%
asymmetric	0.84	0.83	1.2%
torsional	0.62	0.60	3.2%

(單位: mV)

表6 單軸方向與三軸加速度之敏感度比較

	$1 \ddot{x}$	$1 \ddot{y}$	$1 \ddot{z}$	$1 \ddot{x} + 1 \ddot{y} + 1 \ddot{z}$
asymmetric	0.83	0	0	0.83
torsional	0	0.60	0	0.60
symmetric	0	0	6.29	6.29

(單位: mV)

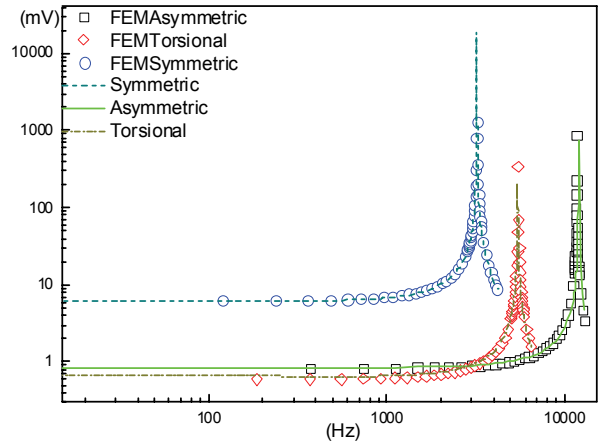


圖6 加速度計在三軸加速度之頻率響應

參考文獻

- [1] R.P. Van Kampen, and R.F. Wolffenbuttel, "Modeling the mechanical behavior of bulk-micromachined silicon accelerometers," Sensors and Actuators, Vol.A 64, pp.137-150, 1998.
- [2] J. Yu, and C. Lan, "System modeling of microaccelerometer using piezoelectric thin films," Sensors and Actuators, Vol.A88, pp.178-186, 2001.
- [3] Q.M. Wang, Z. Yang, F. Li, and P. Smolinski, "Analysis of thin film piezoelectric microaccelerometer using analytical and finite element modeling," Sensors and Actuators, Vol.A113, pp.1-11, 2004.
- [4] S.P. Beeby, N.J. Grabham, N.M. White, "Microprocessor implemented self-validation of thick-film PZT/silicon accelerometer," Sensors and actuators, Vol.A92, pp.168-174, 2001.
- [5] K. Kunz, P. Enoksson and G. Stemme, "Highly sensitive triaxial silicon accelerometer with integrated PZT thin film detectors," Sensors and actuators, Vol.A92, pp.156-160, 2001.
- [6] M. Zhu, P. Kirby, and M.Y. Lim, "Modelling of a Tri-axial Micro-Accelerometer with Piezoelectric Thin Film Sensing," IEEE Sensors Journal, Vol.2, pp.1239-1244, 2003.
- [7] M. Zhu, P. Kirby, and M.Y. Lim, "Lagrange's formalism for modeling of a triaxial microaccelerometer with piezoelectric thin-film sensing," IEEE Sensors Journal, Vol.4, No.4, pp.455-463, August 2004.
- [8] C.C. Hindrichsen, N.S. Almind, S.H. Brodersen, O. Hansen, and E.V. Thomsen, "Analytical model of a PZT thick-film triaxial accelerometer for optimum design," IEEE Sensor Journal, Vol.9, No.4, pp.419-429, April 2009.
- [9] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd Edition. pp.109, McGraw-Hill, New York, 1970.